Répartition des puissances d'un complexe de module 1

Notions abordées : Nombres complexes

On note U l'ensemble des nombres complexes de module 1.

On note U_n l'ensemble des racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité (pour $n \in \mathbb{N}^*$).

On note $d(z,z') = |z'-z|$ la distance entre deux complexes z et z'.

Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on note :

- $\arg(z)$ l'argument du complexe z défini à 2π près.
- $A\text{rg}(z)$ l'unique argument de z qui appartient à $[0,2\pi[$ (appelé argument principal de z).

On se donne $\theta \in [0,2\pi[$, et on considère l'ensemble $V = \{z_n / n \in \mathbb{Z}\}$ avec $z_n = \mathrm{e}^{in\theta}$.

L'objectif de ce problème est l'étude de cet ensemble V.

1. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Déterminer $d(\mathrm{e}^{i\alpha}, \mathrm{e}^{i\beta})$.

   On exprimera la solution sans radicaux et en fonction de $\dfrac{\beta-\alpha}{2}$.

2. On suppose $\theta/\pi \in \mathbb{Q}$ et on forme $A = \{n \in \mathbb{N}^* / z_n = 1\}$.

2.a Montrer que A possède un plus petit élément. Notons m celui-ci.

2.b Etablir que les $z_0, ..., z_{m-1}$ sont deux à deux distincts.

2.c Montrer que $V = U_m$.

Dans toute la suite du problème, on suppose $\theta/\pi \notin \mathbb{Q}$.

3. Montrer que les z_n sont deux à deux distincts.

4. Soit $Z \in U$ et $\varepsilon > 0$.

   On désire établir l'existence d'un $m \in \mathbb{Z}$ tel que $d(z_m, Z) \leq \varepsilon$.

   On se donne $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ de sorte que $\dfrac{2\pi}{n} \leq \varepsilon$.

   On introduit, pour tout $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$, $A_k = \left\{ z \in U / k\dfrac{2\pi}{n} \leq A\text{rg}(z) < (k+1)\dfrac{2\pi}{n} \right\}$.

4.a Etablir que la famille $(A_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ forme une partition de U.

4.b Montrer que parmi les $z_0, \ldots, z_n$ deux éléments au moins se trouvent dans un même A_k.

On note p et q leurs indices respectifs et on pose $\varphi = A\text{rg}(z_p)$ et $\psi = A\text{rg}(z_q)$.

Quitte à échanger p et q on peut supposer $\varphi < \psi$ et on a par construction $\psi - \varphi \in]0, 2\pi/n]$.

4.c Etablir $A\text{rg}(z_{q-p}) = \psi - \varphi$.

4.d On note $\alpha = A\text{rg}(Z)$ et on considère k le plus grand entier tel que $k(\psi-\varphi) \leq \alpha$.

   Montrer que $d(Z, z_{k(q-p)}) \leq 2\sin\dfrac{\psi-\varphi}{2}$.

4.e Etablir $\forall x \geq 0, \sin(x) \leq x$, et conclure.

Rq : Le résultat établi dans la question 4 pourrait s'interpréter : V est dense dans U ...

Correction

d'après ISG 1979

1. $e^{i\beta}-e^{i\alpha}=(e^{i(\beta-\alpha)/2}-e^{-i(\beta-\alpha)/2})e^{i(\beta+\alpha)/2}=2i\sin\frac{\beta-\alpha}{2}e^{i(\beta+\alpha)/2}$

donc $d(e^{i\beta}-e^{i\alpha})=2\left|\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\right|$.

2.a Par hypothèse $\exists(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$ tel que $\theta=\frac{p\pi}{q}$.

On a alors $z_{2q}=e^{2ip\pi}=1$. Donc $2q\in A$ et par suite $A\neq\varnothing$.

A est une partie non vide de $\mathbb{N}$, elle possède un plus petit élément m.

2.b Supposons $\exists 0\leq k,\ell\leq m$ tels que $z_k=z_\ell$ i.e. $e^{ik\theta}=e^{i\ell\theta}$

Quitte à échanger k et ℓ on peut supposer $k\leq\ell$.

On a alors $e^{in\theta}=1$ avec $n=\ell-k\in\mathbb{N}$.

Or $n<m$ et m est le plus petit élément de A donc $n\notin A$.

Par suite $n=0$ i.e. $k=\ell$.

2.c Puisque $m\in A$ on a $e^{im\theta}=1$.

Par suite $\forall 0\leq k\leq m-1, z_k^m=e^{imk\theta}=(e^{im\theta})^k=1^k=1$ et donc $z_k\in U_m$.

Ainsi $V\subset U_m$.

De plus $\mathrm{Card}\,V=m=\mathrm{Card}\,U_m$ donc $V=U_m$.

3. Par l'absurde : Supposons $\exists k,\ell\in\mathbb{Z}$ tels que $z_k=z_\ell$ avec $k\neq\ell$.

Quitte à échanger k et ℓ on peut supposer $k<\ell$.

$z_k=z_\ell$ donne $e^{ik\theta}=e^{i\ell\theta}$ d'où $e^{i(k-\ell)\theta}=1$ puis $(k-\ell)\theta=2m\pi$ avec $m\in\mathbb{Z}$. Par suite $\theta=\frac{2m\pi}{k-\ell}$ et donc $\frac{\theta}{\pi}\in\mathbb{Q}$. Absurde.

4. $\forall 0\leq k\leq n-1, A_k\neq\varnothing$ car $e^{2ik\pi/n}\in A_k$.

Il est clair que $\bigcup_{0\leq k\leq n-1}A_k\subset U$.

Inversement, soit $z\in U$ et $\alpha=A\mathrm{rg}(z)\in[0,2\pi[$.

Pour $k=E(\frac{n\alpha}{2\pi})\in\{0,\ldots,n-1\}$ on a $\frac{2k\pi}{n}\leq\alpha<\frac{2(k+1)\pi}{n}$ et donc $z\in\bigcup_{0\leq k\leq n-1}A_k$. Ainsi $U\subset\bigcup_{0\leq k\leq n-1}A_k$ puis $U=\bigcup_{0\leq k\leq n-1}A_k$.

Soit $k,\ell\in\{0,\ldots,n-1\}$. Si $A_k\cap A_\ell\neq\varnothing$. Soit $z\in A_k\cap A_\ell$ et $\alpha=A\mathrm{rg}(z)$. On a $\frac{2k\pi}{n}\leq\alpha<\frac{2(k+1)\pi}{n}$ et $\frac{2\ell\pi}{n}\leq\alpha<\frac{2(\ell+1)\pi}{n}$ donc

$\frac{2k\pi}{n}<\frac{2(\ell+1)\pi}{n}$ et $\frac{2\ell\pi}{n}<\frac{2(k+1)\pi}{n}$ d'où $k<\ell+1$ et $\ell<k+1$ ce qui donne $k=\ell$. Finalement $(A_k)_{0\leq k\leq n-1}$ est une partition de U.

4.b Il y a $n+1$ éléments différents dans la liste $z_0,\ldots,z_n$. Ceux-ci sont à repartir parmi les n ensembles $A_0,\ldots,A_{n-1}$. Forcément l'un des ensembles en contient au moins 2 (cette idée est connue sous le nom de principe des tiroirs).

4.c Remarquons $z_q=e^{iq\theta}=e^{i(q-p)\theta}.e^{ip\theta}=z_{q-p}z_p$. On a donc $\arg(z_q)=\arg(z_{q-p})+\arg(z_p)\ \ [2\pi]$ d'où $\arg(z_{q-p})=\arg(z_q)-\arg(z_p)=\psi-\varphi\ \ [2\pi]$.

Comme de plus $\psi-\varphi\in[0,2\pi[$, on peut affirmer $A\mathrm{rg}(z_{q-p})=\psi-\varphi$.

4.d On a $k(\psi-\varphi)\leq\alpha<(k+1)(\psi-\varphi)$ (en fait $k=E(\frac{\alpha}{\psi-\varphi})$).

Remarquons $z_{k(q-p)}=(e^{i(q-p)\theta})^k=z_{q-p}^k=(e^{i(\psi-\varphi)})^k=e^{ik(\psi-\varphi)}$.

$d(Z, z_{k(q-p)}) = d(\mathrm{e}^{i\alpha}, \mathrm{e}^{ik(\psi-\varphi)}) = 2\left|\sin\dfrac{k(\psi-\varphi)-\alpha}{2}\right|$.

L'encadrement initial donne : $0 \leq \dfrac{k(\psi-\varphi)-\alpha}{2} \leq \dfrac{\psi-\varphi}{2} \leq \dfrac{2\pi}{2n} \leq \dfrac{\pi}{2}$.

$x \mapsto \sin x$ étant croissante sur $[0, \pi/2]$: $0 \leq \sin\dfrac{\alpha-k(\psi-\varphi)}{2} \leq \sin\dfrac{\psi-\varphi}{2}$ qui donne le résultat voulu.

4.e $f : x \mapsto x - \sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$, donc f est croissante sur $\mathbb{R}^+$, or $f(0) = 0$, la fonction f est donc positive sur $\mathbb{R}^+$.

$d(Z, z_{k(q-p)}) \leq 2\dfrac{\psi-\varphi}{2} = \psi - \varphi \leq \dfrac{2\pi}{n} \leq \varepsilon$!